

# Calcul de la topologie de variétés algébriques de petite dimension

## Séminaire de la SFR MathStic

### Date et lieu

Ce séminaire se déroulera le jeudi 22 septembre 2022 de 14h00 à 15h30 dans l'amphithéâtre D du bâtiment A de la faculté des sciences. Ce séminaire est financé par la [SFR Math-STIC](#) et le [LARIS](#).

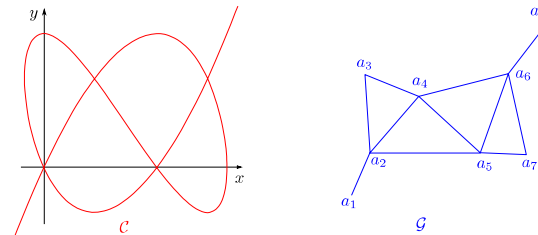


Figure 1: La courbe algébrique  $C$  d'équation  $16x^5 - 20x^3 + 5x - 4y^3 + 3y = 0$  et un graphe  $\mathcal{G}$  ayant la même topologie que  $C$ .

### Programme

- 14h00-14h30 : *Une (très) courte introduction à la géométrie algébrique réelle*. Nicolas Delanoue, LARIS - Université d'Angers.
  - L'exposé commencera par motiver l'étude de ces sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  avec des problèmes issus de la robotique : planification de trajectoires, étude de singularités, mode d'assemblage. Dans un second temps, on exposera plusieurs techniques algorithmiques classiques comme la méthode de Sturm ou encore la théorie des résultants. La première permet de dénombrer (et isoler) algorithmiquement les racines réelles d'un polynôme d'une variable. Avec la théorie des résultants, il est possible de décider que deux polynômes ont une racine en commun. Employées correctement, ces deux méthodes permettent de calculer la topologie d'un ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ . Lors de cette présentation, de nombreux exemples seront donnés en dimension 2. Finalement, la complexité en temps de ces algorithmes sera discutée en tenant compte de la taille potentielle des mots mémoires mis en jeu lors de l'exécution. Les exposés suivants proposeront des algorithmes calculant la topologie de courbes algébriques du plan ayant de meilleures complexités. [Résumé complet](#)
- 14h30-15h00 : *Comment dessiner une courbe correctement ?* Marc Pouget, GAMBLE, INRIA Nancy, LORIA lab.
  - Résumé : Tout logiciel de calcul permet de visualiser une courbe définie implicitement par une équation. Cependant, rares sont les logiciels apportant des garanties sur la topologie du résultat. Dans le cas d'une courbe algébrique, nous rappellerons les difficultés de l'algorithme classique de décomposition cylindrique algébrique et proposerons une alternative utilisant des représentations univariées rationnelles (RUR). En particulier, nous présenterons les idées permettant d'obtenir la meilleure complexité de l'état de l'art pour calculer les RURs avec un algorithme de type Las Vegas (l'algorithme est probabiliste avec un résultat garanti dont on étudie la complexité en moyenne). Un serveur de calcul de topologie et visualisation de courbes est disponible sur <https://isotop.gamble.loria.fr> [Résumé complet](#)
- 15h00-15h30 : *Calcul efficace de la topologie d'une courbe algébrique plane définie comme l'ensemble des zéros d'un polynôme bivarié de degré  $d$* . Daouda Diatta, Université Assane SECK de Ziguinchor. Sénégal.
  - Résumé : Il est bien connu que le comptage et la localisation des racines réelles d'un polynôme univarié réel est la pierre angulaire de la plupart des algorithmes calculant la topologie des courbes algébriques réelles planes. En effet isoler les racines réelles du discriminant de la courbe algébrique (correspondant à la projection des points singuliers et critiques de la courbe sur l'axe des abscisses) et déterminer les fibres de la courbe en ces racines du discriminant sont des étapes incontournables pour toutes les méthodes basées sur l'approche Décomposition Cylindrique Algébrique. Nous présenterons un algorithme récent qui calcule, sans conditions de genericité ni changement de variable, la topologie d'une courbe algébrique plane définie comme l'ensemble des zéros d'un polynôme bivarié de degré  $d$  et de coefficients entiers de taille binaire bornée par  $\tau$  en  $O(d^5 \tau^6)$  opérations binaires. [Résumé complet](#)

### Crédits pour les doctorants

Des certificats de participation seront délivrés à tous les doctorants qui en feront la demande, afin qu'ils puissent potentiellement s'en prévaloir auprès de leur école doctorale.

### Lieu de l'événement

Le séminaire se déroulera dans l'amphithéâtre D du bâtiment A de la faculté des sciences à la faculté des sciences de l'université d'Angers sur le campus de Belle Beille. L'adresse exacte est : 2 Bd de Lavoisier, 49000 Angers, France.

# Une (très) courte introduction à la géométrie algébrique réelle

Nicolas DELANOUE, nicolas.delanoue@univ-angers.fr  
LARIS - Université d'Angers.

22 septembre 2022  
Séminaire de la SFR MathSTIC - Université d'Angers

La géométrie algébrique réelle a pour premier objet l'étude des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  définis par des équations polynomiales : les ensembles algébriques réels.

L'exposé commencera par motiver l'étude de ces sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  avec des problèmes issus de la robotique : planification de trajectoires, étude de singularités, mode d'assemblage.

Dans un second temps, on exposera plusieurs techniques algorithmiques classiques comme la méthode de Sturm ou encore la théorie des résultants [4]. La première permet de dénombrer (et isoler) algorithmiquement les racines réelles d'un polynôme d'une variable. Avec la théorie des résultants, il est possible de décider que deux polynômes ont une racine en commun. Employées correctement, ces deux méthodes permettent d'analyser algorithmiquement la topologie d'un ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$  [1] (Voir Fig. 1). Lors de cette présentation, de nombreux exemples seront donnés en dimension 2.

Finalement, la complexité en temps de ces algorithmes sera discutée en tenant compte de la taille potentielle des mots mémoires mis en jeu lors de l'exécution. Les exposés suivants proposeront des algorithmes calculant la topologie de courbes algébriques du plan ayant de meilleures complexités [2, 3].

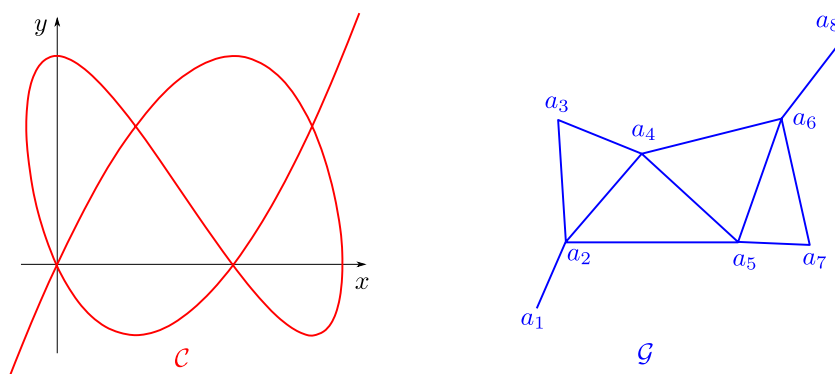


FIGURE 1 – La courbe algébrique  $\mathcal{C}$  d'équation  $16x^5 - 20x^3 + 5x - 4y^3 + 3y = 0$  et un graphe  $\mathcal{G}$  ayant la même topologie que  $\mathcal{C}$ .

## Références

- [1] Saugata Basu, Richard Pollack, and Marie-Françoise Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, 2006. 2nd ed.
- [2] Yacine Bouzidi, Sylvain Lazard, Marc Pouget, and Fabrice Rouillier. Separating linear forms and rational univariate representations of bivariate systems. *Journal of Symbolic Computation*, 68 :84–119, 2015.
- [3] Daouda Niang Diatta, Sény Diatta, Fabrice Rouillier, Marie-Françoise Roy, and Michael Sagraloff. Bounds for polynomials on algebraic numbers and application to curve topology. *Discrete and Computational Geometry*, 67 :631–697, February 2022.
- [4] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard. *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, 1999.

# Comment dessiner une courbe correctement ?

Marc POUGET, marc.pouget@inria.fr  
GAMBLE, INRIA Nancy, LORIA lab.

22 septembre 2022  
Séminaire de la SFR MathSTIC - Université d'Angers

Tout logiciel de calcul permet de visualiser une courbe définie implicitement par une équation. Cependant, rares sont les logiciels apportant des garanties sur la topologie du résultat. Dans le cas d'une courbe algébrique, nous rappèlerons les difficultés de l'algorithme classique de décomposition cylindrique algébrique et proposerons une alternative utilisant des représentations univariées rationnelles (RUR). En particulier, nous présenterons les idées permettant d'obtenir la meilleure complexité de l'état de l'art pour calculer les RURs avec un algorithme de type Las Vegas (l'algorithme est probabiliste avec un résultat garanti dont on étudie la complexité en moyenne). Un serveur de calcul de topologie et visualisation de courbes est disponible sur <https://isotop.gamble.loria.fr/>

# Calcul efficace de la topologie d'une courbe algébrique plane définie comme l'ensemble des zéros d'un polynôme bivarié de degré $d$ .

Daouda DIATTA, [dndiatta@univ-zig.sn](mailto:dndiatta@univ-zig.sn)  
Université Assane SECK de Ziguinchor. Sénégal.

22 septembre 2022  
Séminaire de la SFR MathSTIC - Université d'Angers

Il est bien connu que le comptage et la localisation des racines réelles d'un polynôme univarié réel est la pierre angulaire de la plupart des algorithmes calculant la topologie des courbes algébriques réelles planes. En effet isoler les racines réelles du discriminant de la courbe algébrique (correspondant à la projection des points singuliers et critiques de la courbe sur l'axe des abscisses) et déterminer les fibres de la courbe en ces racines du discriminant sont des étapes incontournables pour toutes les méthodes basées sur l'approche Décomposition Cylindrique Algébrique.

Nous présenterons un algorithme récent qui calcule, sans conditions de généricité ni changement de variable, la topologie d'une courbe algébrique plane définie comme l'ensemble des zéros d'un polynôme bivarié de degré  $d$  et de coefficients entiers de taille binaire bornée par  $\tau$  en  $\tilde{O}(d^5\tau + d^6)$  opérations binaires.